

11. Substituční metoda

SUBSTITUCE - matematická

- nejprve $\Rightarrow$ převedeme matematickou rovnici matematickou $\Rightarrow$ zjednodušíme rovnici $\Rightarrow$ po jejím vyřešení se vrátíme zpět k substituci a dopočítáme původní matematickou
- můžeme počítat - nejprve se „podíváme“, zda by nás stačila substituční metoda

Příklady

① Řešit v $\mathbb{R}$ $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}$

kubická rovnice (ne 4. stupně, a není chybný členy obs. 3. a 1. mocniny matematické)

(*) substit. $y = x^2$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y - 2)(y - 1) = 0$$

$y_1 = 2$ $y_2 = 1$
zpět k substit. (*)

$x^2 = 2$ $x^2 = 1$

$|x| = \sqrt{2}$ $|x| = 1$
 $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$ $x_{3,4} = \pm 1$

$\mathcal{K} = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

② Řešit v $\mathbb{R}$ $\frac{3x}{2x-1} + 1 = 2 \cdot \frac{2x-1}{x}$

$$\begin{bmatrix} 2x-1 \neq 0 & x \neq 0 \\ 2x+1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(*) substit. $y = \frac{1}{2x-1}$

$\mathbb{D}_L = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}$

$3y + 1 = 2 \cdot \frac{1}{y} \quad | \cdot y \quad [y \neq 0 \text{ protože } x \neq 0 \text{ a } x \neq \frac{1}{2}]$

$3y^2 + y = 2$

$3y^2 + y - 2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-1-5}{6} = -1 \end{cases}$

$y_1 = \frac{2}{3}$

zpět k substit. (*)

$y = -1$

$\frac{1}{2x-1} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2x-1} = -1$

$3x = 2(2x-1)$

$x = -(2x-1)$

$3x = 4x-2$

$x = -2x+1$

$2 = x$

$3x = 1$

$x_1 = 2 \in \mathbb{R}$

$x_2 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{R}$

$\mathcal{K} = \{2, \frac{1}{3}\}$

③ Řešit v $\mathbb{R}$

$$\left(\frac{3x+5}{x-5} - 2\right) \left(4 \frac{x-5}{3x+5} - 3\right) = \frac{3x+5}{5-x}$$

subst. $y = \frac{3x+5}{x-5}$ $\left[\begin{array}{l} x \neq 5 \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{array} \right]$
 $D = \mathbb{R} - \{5, -\frac{5}{3}\}$

$$(y-2) \left(4 \frac{1}{y} - 3\right) = -y$$

$$(y-2) \left(\frac{4}{y} - 3\right) = -y$$

$$(y-2) \frac{4-3y}{y} = -y \quad | \cdot y$$

$$(y-2)(4-3y) = -y^2$$

rozložíme na součiny

$$4y - 3y^2 - 8 + 6y = -y^2$$

$$-2y^2 + 10y - 8 = 0 \quad | : (-2)$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$(y-4)(y-1) = 0$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = 1$$

vrátíme k subst.

$$\frac{3x+5}{x-5} = 4$$

$$\frac{3x+5}{x-5} = 1$$

$$3x+5 = 4(x-5)$$

$$3x+5 = x-5$$

$$3x+5 = 4x-20$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

$$25 = x$$

$\in D$

$$K = \{-5, 25\}$$

⑤ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right] \quad D_x = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13$$

subst. $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$ (*)

$$a+b=5 \Rightarrow a=5-b$$

$$a^2+b^2=13$$

$$(5-b)^2+b^2=13$$

$$25-10b+b^2+b^2=13$$

$$2b^2-10b+12=0$$

$$b^2-5b+6=0$$

$$(b-3)(b-2)=0$$

$$b_1 = 3 \quad b_2 = 2$$

vrátíme k subst.

$$a_1 = 5-3$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5-2$$

$$a_2 = 3$$

vrátíme k subst.

vrátíme k subst. (*)

$$a_1 = \frac{1}{x_1}$$

$$2 = \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{y_1}$$

$$3 = \frac{1}{y_1}$$

$$y_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2}$$

$$3 = \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{y_2}$$

$$2 = \frac{1}{y_2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

④ Řešit v $\mathbb{R}$

a) $|1x+3|+2=4$

subst. $y = 1x+3$

$$|y+2|=4$$

$$[\text{mul. b. } -2]$$

$$\frac{y}{-6} \quad \frac{y}{-2} \quad \frac{y}{2}$$

$$y_1 = -6$$

$$|x+3| = -6$$

neexistuje

$$y_2 = 2$$

$$|x+3| = 2$$

mul. b. -3

$$\frac{y}{-5} \quad \frac{y}{-3} \quad \frac{y}{-1}$$

$$K = \{-5, -1\}$$

b) $|1x-3|+1 \leq 5$

subst. $y = 1x-3$

$$|y+1| \leq 5$$

$$[y_0 = -1]$$

$$\frac{y}{-6} \quad \frac{y}{-1} \quad \frac{y}{4}$$

$$y \in \langle -6, 4 \rangle, y:$$

$$-6 \leq y \leq 4$$

vrátíme k subst.

$$-6 \leq |x-3| \leq 4$$

$$|x-3| \geq -6 \quad \wedge \quad |x-3| \leq 4$$

asym.

mul. b. 3

platí pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x-3| \geq 0$$

$$\frac{y}{-1} \quad \frac{y}{3} \quad \frac{y}{7}$$

vrátíme k subst.

$$\frac{y}{-1} \quad \frac{y}{7}$$

$$K = \langle -1, 7 \rangle$$

6) Řeš v R $\sqrt{2(x^2+3x+6)^2-7} = x^2+3x+7$
 $(x^2+3x+6+1)$
 subst. $y = x^2+3x+6$

(umocněním - od 4. stupně -
 rovnáme)

$\sqrt{2y^2-7} = y+1 \quad |^2$ IRAC. ROE
 - ZK. NUTNÁ

$2y^2-7 = y^2+2y+1$

$y^2-2y-8=0$

$(y-4)(y+2)=0$

$y=4$ $y=-2$
 zpět k subst.

$x^2+3x+6=4$

$x^2+3x+6=-2$

$x^2+3x+2=0$

$x^2+3x+8=0$

$(x+2)(x+1)=0$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-48}}{2}, D < 0$

není řešení v R

$x_1 = -2$ $x_2 = -1$

zk.

$L(-2) = \sqrt{2(4-6+6)^2-7} =$

$= \sqrt{2 \cdot 16 - 7} = \sqrt{25} = 5$

$P(-2) = 4-6+7=5 \quad L(-2)=P(-2)$

$L(-1) = \sqrt{2(1-3+6)^2-7} =$

$= \sqrt{32-7} = \sqrt{25} = 5$

$P(-1) = 1-3+7=5 \quad L(-1)=P(-1)$

$\mathcal{K} = \{-1, -2\}$

7) Řeš v R

a) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 5\frac{x-1}{x+1} + 6 = 0$ $D = R - \{-1\}$

subst. $y = \frac{x-1}{x+1}$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$(y-3)(y-2)=0$

$y=3$ $y=2$
 zpět k subst.

$\frac{x-1}{x+1} = 3$ $\frac{x-1}{x+1} = 2$

$x-1 = 3x+3$ $x-1 = 2x+2$

$-4 = 2x$ $-3 = x$

$x = -2 \in D$ $x = -3 \in D$ $\mathcal{K} = \{-2, -3\}$

b) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 5\frac{x-1}{x+1} + 6 > 0$

subst. $y = \frac{x-1}{x+1}$

$y^2 - 5y + 6 > 0$

$(y-3)(y-2) > 0$

[mul. b. 3, 2]

$\frac{+}{-} \frac{-}{+}$

$y \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

x co DAZ ?!

! ZAPISAT POMOCI NEROVNOSTI !

$y < 2$ $y > 3$
 zpět k subst.

$\frac{x-1}{x+1} < 2$! ANULOVAT ! $\frac{x-1}{x+1} > 3$

NERCE
 V PODÍL.
 TYARU

$\frac{x-1}{x+1} - 2 < 0$

$\frac{x-1-2(x+1)}{x+1} < 0$

$\frac{x-1-2x-2}{x+1} < 0$

$\frac{-x-3}{x+1} < 0 \quad | \cdot (-1)$

$\frac{x+3}{x+1} > 0$

[mul. b. -3, -1]
 $\frac{+}{-} \frac{-}{+}$ $x_1 = -3$ $x_2 = -1$

$\mathcal{K}_1 = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

společně

$\frac{x-1}{x+1} - 3 > 0$

$\frac{x-1-3(x+1)}{x+1} > 0$

$\frac{x-1-3x-3}{x+1} > 0$

$\frac{-2x-4}{x+1} > 0 \quad | \cdot (-1)$

$\frac{2x+4}{x+1} < 0 \quad | : 2$

$\frac{x+2}{x+1} < 0$

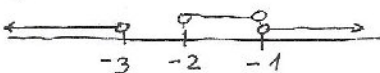
[mul. b. -2, -1]

$\frac{+}{-} \frac{-}{+}$ $x_1 = -2$ $x_2 = -1$

$\mathcal{K}_2 = (-2, -1)$

UVĚDOMU SI ROZDÍL PŘI ŘEŠENÍ
 ROVNICE A NEROVNICE

společně!



$\mathcal{K} = (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$

⑧ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\frac{2(x-1)}{y+1} - \frac{3(y+2)}{x-1} = 3$$

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{2(y+2)}{x-1} = -2$$

Subst. $a = \frac{x-1}{y+1}, b = \frac{y+2}{x-1}$

$$2a - 3b = 3$$

$$a + 2b = -2 \Rightarrow a = -2 - 2b$$

$$-4 - 4b - 3b = 3$$

$$-7b = 7$$

$$b = -1$$

$$a = -2 - 2 \cdot (-1)$$

$$a = 0$$

$$\mathcal{D}_x = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\mathcal{D}_y = \mathbb{R} - \{-1\}$$

zpět k Subst.

$$\frac{x-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{y+2}{x-1} = -1$$

$$x-1=0$$

$$x=1 \notin \mathcal{D}$$

$$\left(\begin{array}{l} y+2 = -x+1 \\ y = -1-1 \\ y = -2 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{K} = \emptyset$$